به نامِ خدا

جسمی درونِ سیلالی حرکت می‌کند. نیرویِ مقاومتی که از طرفِ سیال به آن وارد می‌شود به شکلِ $K v^4$ است، که K یک ثابت و v اندازه‌ی سرعتِ جسم است. بُعدِ K کدام است؟

الف) $\mathsf{M L^{-3} T^2}$ ب) $\mathsf{M T^{-1}}$

ج) $\mathsf{M L^{-1}}$ د) $\mathsf{L^4 T^{-4}}$

جسمِ سوالِ قبل در همان سیال از حالتِ سکون در راستایِ گرانش سقوط می‌کند. جرمِ جسم را m و شتابِ گرانش را g بگیرید. بُعدِ شتاب LT^{-2} است. می‌توان نشان داد پس از مدتی سرعتِ ذره تقریباً ثابت می‌شود. به این سرعت، سرعتِ حد گفته می‌شود. سرعتِ مشخصه یا سرعتِ حدِّ جسم هم‌مرتبه با کدام گزینه است؟

الف) $\left(\frac{mg}{K}\right)^{1/4}$

ب) $\left(\frac{m}{Kg^3}\right)^{1/3}$

ج) $\left(\frac{m}{Kg^2}\right)^{1/2}$

د) $\left(\frac{m}{Kg^3}\right)^{1/4}$

جرمِ تخمِ شترمرغ بینِ 1 kg تا 1.5 kg است، بینِ 25 تا 30 برابرِ جرمِ یک تخمِ مرغ، یعنی حدودِ یک شانه تخمِ مرغ. تخمِ شترمرغ تقریباً مقیاس‌شده‌یِ تخمِ مرغ است. شکلِ را ببینید. ضریبِ مقیاسِ اندازه‌یِ

طولِ مشخصه‌یِ تخمِ شترمرغ نسبت به طولِ مشخصه‌یِ تخمِ مرغ حدوداً چه‌قدر است؟

الف) 3 ب) 9

ج) 27 د) 81

جرمِ تخمِ شترمرغ بینِ $1\,\mathrm{kg}$ تا $1.5\,\mathrm{kg}$ است، بینِ 25 تا 30 برابرِ جرمِ یک تخمِ مرغ، یعنی حدودِ یک شانه تخمِ مرغ.

برایِ بررسیِ کمّیِ فرآیندِ پختنِ آن‌ها باید از معادله‌یِ حرارت استفاده کرد.

$$\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = D\boldsymbol{\nabla}^2 T(\boldsymbol{r},t).$$

پارامتری که در این معادله وارد می‌شود D با بُعدِ L^2T^{-1} است. حلِّ این معادله ساده نیست. پس سعی نکنید آن را حل کنید. با فرضِ این‌که موادِ تشکیل‌دهنده‌یِ تخمِ مرغ و تخمِ شترمرغ مثلِ هم باشد و فقط اندازه‌یِ یک مقیاس شده دیگری باشد، پارامترِ D برایِ هر دو یکی است. با استفاده از تحلیلِ ابعادی رابطه‌ای بینِ زمانِ پختن، T، مساحتِ تخمِ مرغ S، و پارامترِ D به دست آورید. زمانِ پختنِ تخمِ مرغ را حدودِ $10\,\mathrm{min}$ بگیرید. با استفاده از تحلیلِ ابعادی چه چیزی در موردِ زمانِ تقریبی‌یِ پختنِ تخمِ شترمرغ می‌توانید بگویید؟

الف) $30\,\mathrm{min}$

ب) $90\,\mathrm{min}$

ج) $270\,\mathrm{min}$

د) $10\,\mathrm{min}$

متخصصینِ پزشکی‌یِ قانونی گاهی لازم است زمانِ مرگِ یک قربانی را تخمین بزنند. فرض کنید که در زمانِ مرگ دمایِ بدن همان دمایِ معمول یعنی ۳۷ درجه باشد. پس از مرگ، جسد سوخت‌وسازی ندارد، و به تدریج با محیطِ اطرافش هم‌دما می‌شود. میزانِ از دست‌دادنِ دمایِ بدن متناسب با سطحِ بدن، S است. انرژی‌یِ گرمایی‌یِ بدن متناسب با حجم، V است. دو جسد هستند که متشابهِ هم‌اند، یعنی یکی مقیاس‌شده‌یِ دیگری است. آن‌که بلندتر است قدش حدود $h_A = 2\,\mathrm{m}$، و دیگری قدش حدود $h_B = 1.5\,\mathrm{m}$، است. زمانِ سرد شدنِ جسدِ بلندتر T_A و زمانِ سرد شدنِ جسدِ کوتاه‌تر T_B است. $\frac{T_A}{T_B}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{3}{2}$
ب) $\frac{4}{3}$
ج) $\frac{3}{4}$
د) $\frac{9}{4}$

ذره‌ای به جرمِ m که در ابتدا ساکن است، تحتِ تاثیرِ نیرویِ

$$\mathbf{F}(t) = F_0 \, \frac{t}{t+\tau}\mathbf{i}$$

قرار می‌گیرد. F_0 و τ ثابت هستند.

الف‌ـ با پارامترهایی که در قانونِ نیوتن ظاهر می‌شوند، یعنی F_0, τ و m یک زمانِ مشخصه، یک سرعتِ مشخصه و یک طولِ مشخصه به دست آورید.

ب‌ـ سرعتِ ذره $v(t)$ را به دست آورید.

راه‌نمایی: در انتگرال‌گیری تغییرِ متغیرِ $u = t + \tau$ ممکن است به دردتان بخورد.

ج‌ـ در زمان‌هایِ اولیه یعنی زمانی که $\epsilon := \dfrac{t}{\tau} \ll 1$ سرعتِ ذره تقریباً چه‌قدر است؟

راه‌نمایی: بسطِ زیر ممکن است به دردتان بخورد.

$$\frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \epsilon + \epsilon^2 - \epsilon^3 + \cdots, \qquad \epsilon \ll 1$$

د‌ـ پس از زمان‌هایِ طولانی یعنی زمانی که $\epsilon := \dfrac{\tau}{t} \ll 1$ تابعیتِ سرعتِ ذره نسبت به زمان تقریباً چه‌گونه است؟